ANALYSE HARMONIQUE DANS QUELQUES ALGÈBRES HOMOGÈNES

PAR

Y. KATZNELSON ET P. MALLIAVIN

ABSTRACT

Etude d'algèbres homogènes sur le cercle ayant les mêmes propriété, de calcul symbolique et de synthèse speciale que l'algèbre de Wiener.

Nous nous placerons sur le cercle T. Nous noterons par $C(T)$ l'algèbre de Banach des fonctions continues sur T, par A celle des fonctions ayant une série de Fourier absolument convergente. Les algèbres que nous considèrerons seront des algèbres de Banach, semi-simples, autoadjointes, ayant pour spectre T. Nous les identifierons à des algèbres de fonctions de $C(T)$. Une telle algèbre B sera dite *homogène* si l'application de B dans B définie par la translation $f(x) \to f(x+a)$ est une application isométrique de B sur B, telle que pour tout $f \in B$, f fixé, l'application $a \to f(x+a)$ soit une application continue de T dans B. On dira qu'une algèbre homogène B est *fortement homogène* [1] si de plus quel que soit l'entier l'application de B dans B définie par $f(x) \to f(kx)$ est de norme 1.

Nous allons étudier des algèbres homogènes qui sont comprises entre $C(T)$ et A. Nous pourrons pour des classes générales de telles algèbres généraliser les résultats classiques pour A: *seules les fonctions analytiques opèrent, non synthèse spectrale, tous les automorphismes différentiables de l'algèbre sont donnés par des changements de variables linéaires.* Par contre un problème ouvert pour A, à savoir celui de la dichotomie du calcul symbolique sur les algèbres de restriction, pourra être démontré non vrai dans le cadre de ces algèbres homogènes. Comme une tendance actuelle est de penser que la dichotomie vaut dans A, ce dernier résultat montre que s'il en est ainsi sa démonstration ne pourra être donnée que par une étude fine des propriétés de A qui la distingue des algèbres homogènes.

La méthode utilisée pour construire des algèbres homogènes intermédiaires entre $C(T)$ et A sera celle de [1]; nous allons la rappeler ci-dessous.

Received June 24, 1966

Si E est une partie fermée de T, nous noterons par $A(E)$ l'algèbre des restrictions de A à E, c'est à dire le quotient de A par l'idéal de toutes les fonctions de A s'annulant sur E. Remarquons que l'espace dual $(A(E))^*$ de $A(E)$ s'identifie avec les pseudomesures, dont le support est contenue dans E, et qui de plus sont orthogonales à toutes les fonctions de A s'annulant sur E.

Avec [1], nous noterons par A_E la plus grande algèbre homogène dont la restriction à E est $A(E)$. La norme dans A_E est définie par

$$\|f\|_{A_E} = \sup_{a \in T} \|\tau_a f\|_{A(E)} \text{ (où } (\tau_a f)(x) = f(x+a)).$$

De même on introduit la plus grande algèbre fortement homogène contenant $A(E)$, soit A^E. La norme dans A^E est définie par

$$\|f\|_{A^E} = \sup_{k \in Z} \|h_k f\|_{A_E} \text{ (où } (h_k f)(x) = f(kx)).$$

Dans ce travail nous donnerons une condition sur E pour que $A^E = A$, puis une autre condition sur E pour que dans A_E la synthèse spectrale soit fausse; enfin une condition sur E permettant de décrire les automorphismes de A_E. Ensuite nous terminerons par deux exemples, celui d'une algèbre contenant toutes les fonctions ayant un module de continuité ω donné à l'avance, et qui néanmoins possède toutes les propriétés de A, enfin celui d'une algèbre fortement homogène telle que la dichtomie au sens fort n'ait pas lieu.

I. Conditions sur E. Etant donne une partie E de T nous expeirmerons "l'épaisseur" de E en termes du comportement des transformées de Fourier d'éléments de $(A(E))^*$. Etant donné $p \in (A(E))^*$, $\varepsilon > 0$ et trois entiers k, l, N nous noterons par

$$G_l = \{n \in Z \mid |n| \leqq N, |\hat{p}(kn+l)| > \varepsilon\}.$$

Si nous nous donnons de plus un entier J nous poserons

$$H_l = \bigcup_{l-J \leqq s \leqq l+J} G_s.$$

Nous avons alors les 3 conditions suivantes (Q'), (Q''), (Q):

(Q′) Quels que soient $\varepsilon > 0$ et N, on peut trouver $p \in (A(E))^*$ et k tels que $\|p\|_{A^*} = 1$ et que, quel que soit $l \in Z$, G_l possède au plus *un* élément.

(Q″) Quels que soient $\eta > 0$, $\varepsilon > 0$ et N on peut trouver p satisfaisant la condition (Q′) et dont le support est de diamètre $< \eta$.

(Q) Quels que soient $\varepsilon > 0$, N et J on peut trouver $p \in (A(E))^*$ et k tels que $\|p\|_{A^*} = 1$ et que quel que soit $l \in Z$, H_l possède au plus un seul élément.

Remarquons que chacune de ces trois conditions sont inchangées si on remplace $p(t)$ par $\alpha e^{ist} p(t)$, $|\alpha| = 1$. En effectuant cette transformation on pourra toujours se ramener au cas où p satisfait de plus à $\hat{p}(0) > \frac{1}{2}$.

Les trois conditions (Q′), (Q″) et (Q) sont rangées dans l'ordre inverse de leurs implications. Ceci résultera de

LEMME 1. *La condition* (Q) *implique la condition* (Q″).

Preuve. Donnons nous $\eta > 0$, $\varepsilon > 0$ et l'entier N. Notons par δ la fonction dont le support est contenue dans $[-\eta/2, \eta/2]$ et égale sur son support à $2\eta^{-1}(1-2|x|\eta^{-1})$.

Soit J un entier tel que

$$\sum_{|q|>J} |\hat{\delta}(q)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Soit p une pseudo mesure satisfaisant la condition (Q) avec $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon\eta/2$, N et J. Posons

$$p_t(x) = \delta(x-t)p(x)$$

comme

$$\int_0^{2\pi} \delta(x-t)\,\frac{dt}{2\pi} = 1$$

l'intégrale étant une intégrale forte à valeurs dans A, on obtient en multipliant les deux membres par $p(x)$

$$\int_0^{2\pi} p_t \frac{dt}{2\pi} = p$$

l'intégrale étant une intégrale forte à valeurs dans A^*, comme $\|\hat{p}\|_{l\infty} = 1$, la fonction p_t que l'on intègre vérifie $\|\hat{p}_{t_0}\|_{l\infty} \geqq 1$ pour certaines valeurs de t. D'autre part,

$$\begin{aligned}\hat{p}_{t_0}(nk+l) &= \sum_q \hat{p}(nk+l+q)\hat{\delta}(-q)e^{-iqt_0}\\ &= \sum_{|q|\leqq J} + \sum_{|q|>J}\end{aligned}$$

D'après le choix de J la deuxième somme est inférieure à ε; en ce qui concerne la première on a

$$\sum_{|q|>J} = \sum_{s=l-J}^{l+J} \hat{p}(nk+s)\hat{\delta}(l-s)e^{-i(l-s)t_0}\quad .$$

Si $n \notin H_l$ tous les termes de $\hat{p}$ figurant dans cette somme sont en module inférieur à $\tilde{\varepsilon}$, par suite, comme $\sum|\hat{\delta}(m)| = 2\eta^{-1}$,

$$|\hat{p}_{t_0}(nk+l)| \leqq \varepsilon \text{ si } n \notin H_l.$$

Comme d'après (Q), H_l ne possède au plus qu'un élément, alors (Q″) est vérifiée.

II. Une condition pour que $A^E = A$. On sait que les fonctions qui opèrent sur $A(E)$ sont celles qui opèrent sur A^E. Par suite, un corollaire immédiat d'un résultat du type $A^E = A$ sera que *seules les fonctions analytiques opèrent sur* $A(E)$. On a

THÉORÈME 1. *Supposons que E satisfasse à la condition* (Q′), *alors*

$$A^E = A.$$

Preuve. Pour évaluer la norme dans $(A_E)^*$ nous utiliserons le lemme:

LEMME 2. *Soit $p \in (A(E))^*$ telle que $\hat{p}(0) = 1$, soit $f \in A(T)$, alors*

$$\|f(x)dx\|_{A_E^*} \leqq \sup_t \|f(x+t)p(x)\|_{A^*} .$$

Preuve. Considérons la fonction à valeurs dans A_E^*

$$\phi(t) = f(x)\,p(x-t)\,.$$

Notons par $\langle g, S\rangle$ le produit scalaire d'une fonction $g \in A$ et d'une pseudomesure S. Alors pour tout $g \in A$ le produit scalaire $\langle g, \phi(t)\rangle$ est une fonction continue de t. De plus, on a

$$\int_0^{2\pi} \langle g, \phi(t)\rangle \frac{dt}{2\pi} = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\frac{dx}{2\pi} \,.$$

D'où, comme

$$\|f(x)dx\|_{A_E} = \sup \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\frac{dx}{2\pi} \quad g \in A, \ \|g\|_{A_E} < 1$$

on en déduit que

$$\|f(x)dx\|_{A_E^*} \leqq \sup_t \|\phi(t)\|_{A_E^*} \,.$$

Notons par E_t le translaté de E d'amplitude t, alors $\phi(t) \in (A(E_t))^*$. Par suite

$$\|\phi(t)\|_{A_E^*} = \|\phi(t)\|_{(A(Et))^*} = \|\phi(t)\|_{A^*}.$$

D'où le lemme.

Démonstration du théorème 1. Nous montrerons que pour tout polynôme trigonométrique on a

$$\|P\|_{A^E} = \|P\|_A \,. \tag{1}$$

Soit N le degré de P. Notons par h_k l'application $P(x) \to P(kx)$, on a

$$\|P\|_{A^E} = \sup \|h_k P\|_{A_E} \,.$$

D'autre part, il existe R, polynôme de degré N tel que $\|R\|_{A^*} = 1$ et que

$$\|P\|_A = \|h_k P\|_A = \langle h_k P, h_k R\rangle.$$

Soit p et k la pseudomesure et l'entier satisfaisant la condition (Q′) avec N et $\varepsilon = \eta/N$, avec de plus

$$\hat{p}(0) > \frac{1}{2}.$$

On a alors, d'après le lemme 2,

$$\|h_k R\|_{A_E^*} < 2 \sup_t \|R(kx)p(x+t)\|_{A^*}.$$

On a

$$\widehat{R(kx)p(x+t)(l)} = \sum_{n=-N}^{+N} \hat{p}(l-kn)e^{i(l-kn)t}\hat{R}(n),$$

d'où

$$\|R(kx)p(x+t)\|_{A^*} \leqq \sum_{n \in G_l} \hat{p}(l-kn)e^{i(l-kn)t}\hat{R}(n) + N\varepsilon$$

D'après l'hypothèse (Q′) la somme comporte un seul terme d'où

$$\|h_k R\|_{A_E^*} \leqq 1 + \eta$$

d'où

$$|\langle h_k P, h_k R\rangle| < \|h_k P\|_{A_E} \|h_k R\|_{A_E^*} \leqq (1+\eta)\|h_k P\|_{A_E}$$

d'où, η étant arbitraire, l'égalité (1). C.Q.F.D.

Exemple. Supposons que E contienne des progressions arithmétiques arbitrairement longues (ou plus généralement que, pour une suite de $m_k \to \infty$, on puisse trouver $\tau_1, \tau_2, \cdots \tau_{m_k}$ telle que les 2^{m_k} points $\tau_1 \pm \tau_2 \pm \tau_3 \pm \cdots \pm \tau_{m_k}$ appartiennent à E). Alors on sait (cf. [2] démonstration du théorème 7) que E satisfait la condition (Q) (donc à fortiori à (Q′)). Alors pour ces ensembles $A^E = A$. D'autre part, on sait que (cf. [1]) si E est de mesure nulle $A_E \neq A$. L'ensemble parfait de Cantor est ainsi un exemple où

$$A^E = A \neq A_E.$$

III. Une condition de non synthèse spectrale dans A_E. On a:

THÉORÈME 2. *Si E satisfait la condition* (Q″), *alors A_E ne satisfait pas la synthèse spectrale.*

Preuve. Utilisant une technique connue [3], on voit qu'une condition suffisante pour que A_E ne satisfasse pas la synthèse spectrale est qu'il existe une fonction réelle f, $f \in A$ telle que

$$\Delta(u) = \| e^{iuf} \|_{A_E^*}$$

vérifie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \Delta(u) \, |u| \, du < +\infty .$$

On sait que l'on peut trouver une fonction $g \in A$, g réelle telle que

$$\delta(u) = \| e^{iug} \|_{A^*} < \exp(-u^{1/2}).$$

Nous poserons

$$f(x) = \Sigma \, a_n g(k_n x)$$

où

$$a_n = 2^{-2^{n-1}}$$

et où k_n est une suite d'entiers déterminés ci-dessous.

Posons

$$f_q(x) = \sum_{n=1}^{q} a_n g(k_n x)$$

$$c_n(u) = \int_0^{2\pi} \exp(iug(x) - inx) \frac{dx}{2\pi}$$

$$\tau_n(u) = \sum_{|n| > N} |c_n(u)|.$$

Nous noterons par ε_q et N_q un nombre positif et un entier tels que quel que soit u, $u > 0$, $u < 2^{3.2^{q-1}-3}$, on ait

$$\varepsilon_q < \exp(-2u)$$

$$\tau_{N_q}(u) < \exp(-u^{1/2}).$$

Supposons maintenant que $k_1, \cdots, k_{q-1}$ aient été choisis. Nous allons choisir alors $\eta_q > 0$ tel que pour tout intervalle I de longueur inférieure à η_q on ait

$$\| e^{iuf_{\cdot}} - 1 \|_{A(I)} < 2 \quad 0 < u < 2^{3.2^{q-1}-3}$$

Ceci étant on appliquera la condition (Q″) avec $\eta = \eta_q$, $\varepsilon = \varepsilon_q$ et $N = N_q$. On notera par μ^q la pseudo-mesure correspondant à ces données dont l'existence est assurée par (Q″) et k_q sera l'entier associé à μ^q pour que l'on ait

$$\mathrm{Card}(G_l) \leqq 1 \text{ pour tout } l \in Z.$$

La construction de f est ainsi effectuée.

Ceci étant, nous noterons dans toute la suite par $q = q(u)$ la fonction à valeur entière définie par la relation

$$a_{q(u)+1}^{-1} \leqq 16u^{4/3} < a_{q(u)+2}^{-1}.$$

Comme

$$\sum_{n>q} a_n < 2a_{q+1}$$

on en déduit que l'on a

$$\Delta(u) < \| e^{iuf} \cdot \|_{A_E^*} \exp(2ua_{q+1}).$$

Utilisons d'autre part le lemme 2, on a

$$\Delta(u) < \sup_t \| e^{iuf_q} \mu_t^q \|_{A^*} \exp(2ua_{q+1})$$

où μ_t^q note la translatée de la mesure μ^q.

Enfin

$$\| e^{iuf_q} \mu_t^q \|_{A^*} \leqq \| e^{iuf_{q-1}} \|_{A(I_t)} \| e^{iua_q g(k_q x)} \mu_t^q \|_{A^*}$$

où I_t est un intervalle de longueur η_q contenant le support de μ^q. En vertu du choix de η_q cette norme est inférieure à 2, d'où

$$\Delta(u) < 2 \sup_t \| e^{iua_q g(k_q x)} \mu_t^q \|_{A^*} \exp(2ua_{q+1}).$$

Notons par $d_l(u)$ le l-ième coefficient de Fourier du second membre, on a

$$\begin{aligned} d_l &= \sum_n \mu_t^q (l + k_q n) c_{-n} \\ &= \sum_{n \in G_l} + \sum_{\substack{n \notin G_l \\ |n| \leqq N}} + \sum_{|n| > N}. \end{aligned}$$

La première somme se compose au plus d'un seul terme, donc est majorée par $2\delta(ua_q)$. La seconde somme est majorée par

$$\varepsilon_q \sum |c_n(u)| < \varepsilon_q e^u < e^{-u}.$$

La troisième somme est majorée par $2\tau_N(u)$. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} \Delta(u) &< 20\,\delta(a_q u) \exp(2ua_{q+1}) \\ &< 20 \exp(-a_q^{1/2} u^{1/2} + 2a_{q+1} u). \end{aligned}$$

Remarquons que dans l'intervalle de variation de u considéré on a

$$2\,a_{q+1} u < \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2} a_q^{1/2} u^{1/2},\ a_q u > \frac{1}{4} u^{1/3},$$

on obtient

$$\Delta(u) < 20\exp\left(- \left(\frac{a_q u}{36}\right)^{1/2}\right) < 20\exp\left(- \frac{u^{1/6}}{12}\right).$$

IV. Etude des endomorphismes de A_E. Considerons un endomorphisme de l'algèbre A_E. Si l'on note par $\Phi(t)$ l'image de e^{it} il est immédiat que $|\Phi(t)| = 1$ pour tout $t \in T$ et par conséquent l'on peut écrire $\Phi(t) = e^{i\phi(t)}$ avec $\phi(t)$ réelle et 2π-périodique (mod 2π). L'endomorphisme en question est alors donné par $f(t) \to f(\phi(t))$ pour toute $f \in A_E$. Comme $e^{in\phi(t)}$ est l'image de e^{int}, dont la norme dans A_E est toujours égale à 1, l'on voit qu'une condition nécessaire pour que $f \to f(\phi)$ définisse un endomorphisme est $\| e^{in\phi}\|_{A_E} <$ Const uniformément en n. Le théorème 3 dit que, si E contient des progressions arithmétiques arbitrairement longues, les endomorphismes qui donnent lieu à des changements de variables deux fois différentiables sont nécessairement triviaux.

THÉORÈME 3. *Supposons que E contient des progressions arithmétiques arbitrairement longues. Si $\phi(x)$ est réelle, deux fois continuement dérivable et si $\| e^{iu\phi}\|_{A_E}$ est bornée pour $|u| \to \infty$ alors ϕ est linéaire.*

Démonstration. Il est clair que E contient des progressions arithmétiques arbitrairement longues portées par des intervalles (arcs) arbitrairement courts. Supposons $\phi'' \neq 0$; il existe donc un intervalle I dans lequel $\phi'' \geqq \eta > 0$. Remplaçant $\phi(x)$ par $\phi(x+\alpha)$ nous pouvons supposer que I contient une progression arithmétique E_N de E de longueur N. Le théorème résulte du lemme suivant:

LEMME 3. *Soit E_N une progression arithmétique de longueur $N+1$, portée par un intervalle I; $\phi(x)$ réelle deux fois dérivable telle que*

$$|\phi'(x)| \leqq c, \quad \phi''(x) \geqq \eta > 0 \qquad x \in I,$$

alors

$$\operatorname*{Sup}_u \; \| e^{iu\phi}\|_{A(E_N)} > c_1\sqrt{N}$$

où c_1 ne dépend que de $c\eta^{-1}$.

Démonstration. Sans changer le rapport $c\eta^{-1}$ ni les normes, nous pouvons étaler E_N sur $(-\pi, \pi)$ c'est à dire supposer

$$E_N = \left\{\frac{2\pi k}{N}\right\}_{k=1}^{N} .$$

Prenons $u = N/100\,c$ et évaluons $\| e^{iu\phi}\|_{A(E_N)}$. D'après le lemme de Van der Corput (cf.[4]) l'on a

$$\| e^{-iu\phi}\|_{\mathscr{F}l\infty} < \frac{2}{\pi\sqrt{\eta|u|}} = \frac{20}{\pi}\sqrt{\frac{c}{\eta}}\, N^{-1/2}.$$

Notons

$$\Delta_N(x) = \mathrm{Sup}\left(0, N\left(1 - \frac{N|x|}{2}\right)\right), F = e^{-iu\phi} * \Delta_N \text{ et } \mu = \frac{1}{N} \sum_{x \in E_N} F(x)\delta_x$$

(δ_x est la mesure de Dirac au point x; μ est donc une mesure portée par E_N qui attribue à chaque $x \in E_N$ la masse $1/N F(x)$). L'on sait, d'après Herz [5] que

$$\| \mu \|_{\mathscr{F}l^\infty} \leqq \| e^{-iu\phi} \|_{\mathscr{F}l^\infty} \leqq \frac{20}{\pi} \sqrt{\frac{c}{\eta}} N^{-1/2} .$$

Comme $F(x)$ est une moyenne des valeurs de $e^{-iu\phi}$ dans l'intervalle

$$\left(x - \frac{2\pi}{N}, x + \frac{2\pi}{N}\right)$$

et que

$$\left| \frac{d}{dx} e^{iu\phi} \right| = |u| \phi'(x) < \frac{N}{100c} \cdot c = \frac{N}{100} ,$$

il résulte que

$$|F(x) - e^{-iu\phi(x)}| \leqq \frac{2\pi}{100} < \frac{1}{10}$$

et par conséquent

$$\left| \int e^{iu\phi} d\mu \right| > \frac{1}{2},$$

ce qui entraine

$$\| e^{iu\phi} \|_{A(E_N)} > c_1 \sqrt{N} \text{ avec } c_1 = \frac{\pi}{40} \sqrt{\frac{\eta}{c}} .$$

V. Exemples d'algèbres homogènes. Commençons par énoncer le lemme évident suivant:

LEMME. *Soit ω un module de continuité donné, prenons pour E une suite $\{\alpha_n\}$ tendant vers zéro et telle que*

$$\Sigma\, \omega(\alpha_n) < \infty.$$

Alors toute fonction admettant ω pour module de continuité appartient à A_E.

Ceci étant des théorèmes 2 et 3 nous obtenons:

THEORÈME 4. *Soit $\omega(h)$ un module de continuité. Il existe une algèbre de Banach homogène sur le cercle contenant A et toute fonction admettant ω pour module de continuité et qui possède les propriétés suivantes:*

1) *Toute fonction qui opère dans B est analytique*

2) *Dans B la synthèse spectrale est fausse*

3) *Tout automorphisme deux fois différentiable de B est nécessairement une translation.*

Demonstration. On prend pour B l'algèbre A_E, E étant une suite tendant vers zéro très vite mais contenant néanmoins des progressions arithmétiques arbitrairement longues.

Le problème de la dichotomie du calcul symbolique pour les algèbres homogènes est la question suivante: Est-il vrai que si B est une algèbre de Banach homogène sur T telle que $A \subset B \subsetneqq C(T)$, alors seules les fonctions analytiques opèrent dans B. Si la réponse est positive, même en restreignant la question aux algèbres du type A_E, cela entrainerait la dichotomie du calcul symbolique pour les algèbres quotient de A. Le dernier résultat de cette note montre que si l'on remplace la question ci-dessus par "Est-il vrai que toute fonction qui opère *de A dans B* est nécessairement analytique?". La réponse est négative.

THÉORÈME 5. *Il existe une algèbre fortement homogène B, satisfaisant $C(T) \supset B \supset A(T)$ $B \neq C(T)$ et telle que toute fonction deux fois continuement dérivables opère de A dans B.*

Démonstration. Désignons par A_ε $0 \leqq \varepsilon \leqq 1$ les algèbres (fortement homogènes) obtenues par le méthode d'interpolation de Calderon [6] entre $A_1 = A(T)$ et $A_0 = C(T)$. Posons

$$N_\varepsilon(R) = \sup_{\substack{\|f\|_A \leqq R \\ f \text{ réelle}}} \| e^{if} \|_A$$

Il est facile de voir que $N_\varepsilon(R) = e^{\varepsilon R}$. Soit E une suite tendant vers zéro, réunion des suites $E_j = \{\alpha_j - k\eta_j\}_{k=0}^{j}$ et de $\{0\}$, avec

$$\alpha_j = (j!)^{-j}, \qquad \eta_j = \alpha_j^2.$$

On voit que l'on peut choisir $\varepsilon_j > 0$, $\varepsilon_j \to 0$ de manière à ce que

$$N^*(R) = \sup_{\substack{\|f\|_A \leqq R \\ f \text{ réelle} \\ j=1,2,\ldots}} \| e^{if} \|_{A\varepsilon_j}(E_j)$$

satisfasse à

$$N^*(R) \to \infty, \ N^*(R) \leqq R + 1.$$

Soit B_0 l'algèbre des fonctions ϕ continues sur E satisfaisant

$$\| \phi \|_0 = \sup \| \phi \|_{A\varepsilon_j(E_j)} < \infty$$

avec la norme $\| \phi \|_0$.

L'on peut alors définir B comme l'algèbre fortement homogéne la plus grande, dont la réstriction à E coincide avec B_0, c'est-à-dire l'algèbre des fonctions ψ continues sur T telles que

(i) $\psi(nt+\alpha)|_E \in B_0$ pour tout n, α

(ii) $\psi(nt+\alpha)|_E$ depend contnument de α (en tant qu'élément de B_0),

(iii) $\|\psi\|_B = \sup_{n,\alpha} \|\psi(nt+\alpha)|_E\|_{B_0} < \infty$.

Il est clair que $A(T) \subset B \subsetneqq C(T)$. De l'inegalité concernant $N^*(R)$ l'on obtient $\|e^{inf}\|_B = 0(n)$ pour toute f réelle dans $A(T)$; si $F(x)$ est deux fois continument differentiable que, sans perte de généralité, l'on suppose 2π-périodique, l'on a $F(x) = \sum \hat{F}(n)e^{inf}$ avec $\sum|\hat{F}(n)|\,|n| < \infty$ et par consequent $F(f) = \sum \hat{F}(n)e^{inf}$ est une serie convergente dans B.

L'algèbre B dont l'existence est assurée par le théorème 5 a la propriété suivante: Si μ est une mesure à support fini portée par T et si l'on dénote par $[\mu]$ l'opérateur de convolution sur B

$$[\mu]: f \to \mu * f \quad f \in B$$

alors $\|[\mu]\|$ = masse totale de μ. Ceci résulte de [1] théorème 2 (où l'on parle de fonctions qui opèrent dans B mais la même démonstration reste valable pour des fonctions qui opèrent de A dans B.

BIBLIOGRAPHIE

1. Y. Katznelson, *Calcul symbolique dans les algèbres homogènes*, C.R. Acad. Sci. **254** (1962), 2700–2702.

2. J.-P. Kahane et Y. Katznelson, *Fonctions de la classe A: contribution à deux problèmes.* Israel J. of Math., **1** (1963), 110–131.

3. P. Malliavin, *Imposibilite de la synthèse spectrale sur les groupes abeliens non compacts* I.H.E.S. No. **2** (1959).

4. Zygmund, *Trigonometric series.* Cambridge Vol. **1**, (1959) p. 197,

5. Herz, *Spectral synthesis for Cantor set.* Proc. of the Nat. Acad. Sci. U.S.A. **42** (1956).

6. A. P. Calderon, *Intermediate spaces and interpolation*, Studia Math. **24** (1964), 113–190.

UNIVERSITE HEBRAIQUE DE JERUSALEM
ET
UNIVERSITE DE PARIS